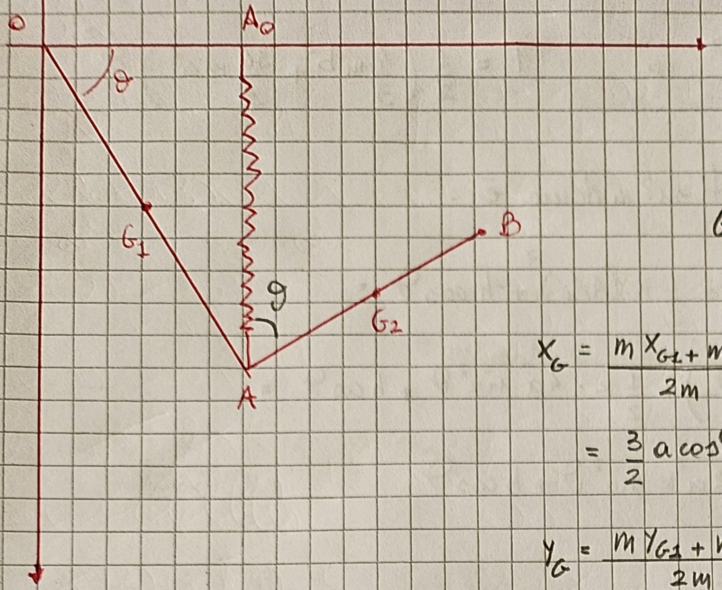
22/04/2024



(a) $\overline{OA} = 2a$, $\overline{AB} = b$

$$G_1 = (a\cos\vartheta ;\ a\sin\vartheta)$$

$$G_2 = (2a\cos\vartheta + b\sin\vartheta ;\ 2a\sin\vartheta - b\cos\vartheta)$$

$$x_G = \frac{m x_{G_1} + m x_{G_2}}{2m} = \frac{\cancel{m}(a\cos\vartheta + 2a\cos\vartheta + b\sin\vartheta)}{2\cancel{m}} =$$

$$= \frac{3}{2} a\cos\vartheta + \frac{1}{2} b\sin\vartheta$$

$$y_G = \frac{m y_{G_1} + m y_{G_2}}{2m} = \frac{\cancel{m}(a\sin\vartheta + 2a\sin\vartheta - b\cos\vartheta)}{2\cancel{m}} =$$

$$= \frac{3}{2} a\sin\vartheta - \frac{1}{2} b\cos\vartheta$$

$$\boxed{G = \left(\frac{3}{2} a\cos\vartheta + \frac{1}{2} b\sin\vartheta ;\ \frac{3}{2} a\sin\vartheta - \frac{1}{2} b\cos\vartheta\right)}$$

G = punto medio di $\overline{G_1G_2}$

(b) Il sistema è un corpo rigido con asse fisso (orizzontale) passante per O. Dunque la sua energia cinetica si può calcolare come:

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz}\, \omega^2 , \quad \text{con} \quad \underline{\omega} = \dot\vartheta\, \underline{k}$$

Per quanto riguarda il calcolo di I_{Oz}, conviene prendere in esame il sistema di riferimento $O\underline{e}_1\underline{e}_2 \equiv O\xi\eta$ in figura. Infatti si ha che:

$$I_\xi = \int_{AB} \rho\,\eta^2\, d\eta = \rho \int_0^{2b} \eta^2\, d\eta = \rho\left[\frac{\eta^3}{3}\right]_0^{2b} = \rho\,\frac{8}{3} b^3 = \frac{m}{2b}\cdot\frac{8}{3} b^3 = \frac{4}{3} m b^2$$

$$I_\eta = \int_{OA} \mu\,\xi^2\, d\xi + \int_{AB} \rho\,(2a)^2\, d\eta = \mu \int_0^{2a} \xi^2\, d\xi + 4a^2\rho \int_0^{2b} d\eta =$$

$$= \mu\left[\frac{\xi^3}{3}\right]_0^{2a} + 4a^2\rho\cdot 2b = \frac{8}{3}\mu a^3 + 8a^2 b\rho = \frac{8}{3}\frac{m}{2a} a^3 + 8a^2 b\frac{m}{2b} =$$

$$= \frac{4}{3} m a^2 + 4 m a^2 = \frac{16}{3} m a^2$$

Ne viene che:

$$I_{Oz} = I_3 + I_7 = \frac{4}{3} m b^2 + \frac{16}{3} m a^2 \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} m b^2 + \frac{16}{3} m a^2\right)\dot{\vartheta}^2$$

Il potenziale totale delle forze agenti sul sistema è:

$$U = U_P + U_{el} + U_M = 2mg\, y_G - \frac{1}{2} k (AA_0)^2 + h\cos\vartheta =$$

$$= 2mg\left(\frac{3}{2} a \sin\vartheta - \frac{1}{2} b\cos\vartheta\right) - \frac{1}{2} k \cdot 4a^2 \sin^2\vartheta + h\cos\vartheta =$$

$$= 3mga\sin\vartheta - mgb\cos\vartheta - 2a^2 k \sin^2\vartheta + h\cos\vartheta$$

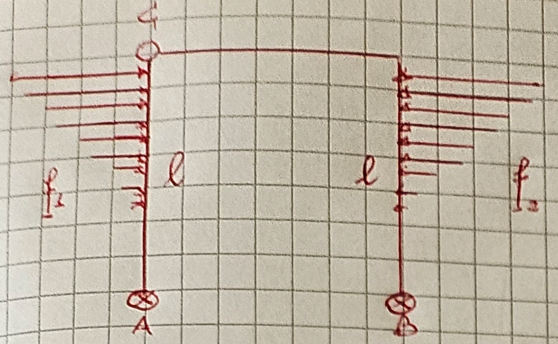
Ne viene che la Lagrangiana è data da:

$$\boxed{L = T + U = \left(\frac{2}{3} m b^2 + \frac{8}{3} m a^2\right)\dot{\vartheta}^2 + 3mga\sin\vartheta - mgb\cos\vartheta - 2a^2 k \sin^2\vartheta + h\cos\vartheta}$$

(c) Si ha che: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \left(\frac{4}{3} m b^2 + \frac{16}{3} m a^2\right)\dot{\vartheta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \left(\frac{4}{3} m b^2 + \frac{16}{3} m a^2\right)\ddot{\vartheta} \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 3mga\cos\vartheta + mgb\sin\vartheta - 4a^2 k \sin\vartheta\cos\vartheta - h\sin\vartheta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{4}{3} m b^2 + \frac{16}{3} m a^2\right)\ddot{\vartheta} - 3mga\cos\vartheta - mgb\sin\vartheta + 4a^2 k \sin\vartheta\cos\vartheta + h\sin\vartheta = 0}$$



$$\underline{f}_1 = f_0 y \underline{i} \quad (f_0 > 0) \qquad \underline{f}_2 = -f_0 y \underline{i}$$

La risultante del carico $\underline{f}_1$ è:

$$\underline{R} = \int_0^l \underline{f}_1 \, dy = \int_0^l f_0 y \underline{i} \, dy = \frac{1}{2} f_0 l^2 \underline{i}$$

mentre la risultante del carico $\underline{f}_2$ è $-\underline{R}$. Entrambi vanno applicati nel centro dei vettori paralleli. Per l'asta AC è il punto D_1 tale che:

$$D_1 - A = \frac{1}{\underline{R} \cdot \underline{i}} \int_0^l (\underline{f}_1 \cdot \underline{i})(P - A) \, dy = \frac{2}{f_0 l^2} \int_0^l (f_0 y)(y \underline{j}) \, dy =$$

$$= \frac{2}{\cancel{f_0} l^2} \cdot \cancel{f_0} \cdot \frac{l^3}{3} \underline{j} = \frac{2}{3} l \underline{j}$$

Analogamente, per la squadra CB il centro è il punto D_2 tale che: $D_2 - B = \frac{2}{3} l \underline{j}$.

La struttura è un arco a tre cerniere con due carichi che formano una coppia di braccio nullo.

Per l'equilibrio, anche le reazioni nelle cerniere fisse $\underline{\Phi}_A$ e $\underline{\Phi}_B$ devono costituire una coppia di braccio nullo: $\underline{\Phi}_A = \Phi_A \underline{i}$, $\underline{\Phi}_B = \Phi_B \underline{i} = -\underline{\Phi}_A$.

Analizziamo l'equilibrio dell'asta AC. La seconda equazione cardinale rispetto al polo C fornisce:

$$(A - C) \times \underline{\Phi}_A + (D_1 - C) \times \underline{R} = \underline{0} \Rightarrow (-l \underline{j}) \times (\Phi_A \underline{i}) + \left(-\frac{1}{3} l \underline{j}\right) \times \left(\frac{1}{2} f_0 l^2 \underline{i}\right) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow l \Phi_A + \frac{1}{6} f_0 l^3 = 0 \Rightarrow \Phi_A = -\frac{1}{6} f_0 l^2 = -\frac{1}{3} R \Rightarrow \boxed{\Phi_A = -\Phi_B = -\frac{1}{3} R}$$

Infine: $\underline{\Phi}_C^{(2,1)} + \underline{R} + \underline{\Phi}_A = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\underline{\Phi}_C^{(2,1)} = -\underline{R} - \underline{\Phi}_A = -R \underline{i} + \frac{1}{3} R \underline{i} = -\frac{2}{3} R \underline{i} = -\underline{\Phi}_C^{(1,2)}}$